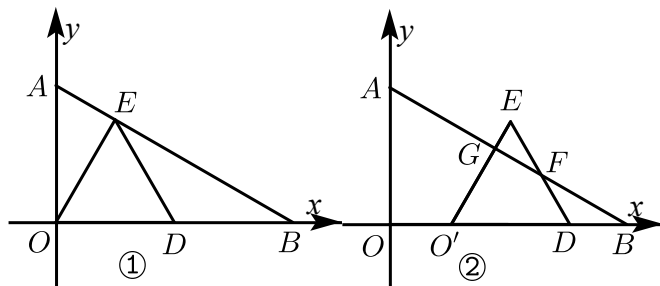


第1讲几何变换之平移（练习）

1. 如图，在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $\angle ABO = 30^\circ$ ， $BO = 4$ ，分别以 OA ， OB 边所在的直线建立平面直角坐标系， D 点为 x 轴正半轴上的一点，以 OD 为一边在第一象限内做等边 $\triangle ODE$ 。

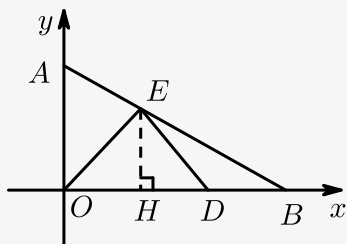


- (1) 如图①当 E 点恰好落在线段 AB 上时，求 E 点坐标。
- (2) 若点 D 从原点出发沿 x 轴正方向移动，设点 D 到原点的距离为 x ， $\triangle ODE$ 与 $\triangle AOB$ 重叠部分的面积为 y ，当 E 点到达 $\triangle AOB$ 的外面，且点 D 在点 B 左侧时，写出 y 与 x 的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围。

【答案】 (1) $E(1, \sqrt{3})$ 。

(2) $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} (2 < x < 4)$ 。

【解析】 (1) 作 $EH \perp OB$ 于 H ，



$\because \triangle OED$ 是等腰三角形，
 $\therefore \angle EOD = 60^\circ$ ，
 又 $\because \angle ABO = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle OEB = 90^\circ$ 。
 $\because BO = 4$ ，
 $\therefore OE = \frac{1}{2}OB = 2$ 。
 $\because \triangle OHE$ 是直角三角形， $\angle OEH = 30^\circ$ ，
 $\therefore OH = 1$ ， $EH = \sqrt{3}$ 。
 $\therefore E(1, \sqrt{3})$ 。

(2) 当 $2 < x < 4$ 时，符合题意，

如图，所求重叠部分四边形 $OD'NE$ 的面积为：

$$\begin{aligned} S_{\triangle OD'E} - S_{\triangle E'EN} &= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{1}{2}E'E \cdot EN \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{x-2}{2} \cdot \sqrt{3}(x-2) \end{aligned}$$

$\therefore$ 所求的函数关系式为： $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} (2 < x < 4)$ 。

【标注】【知识点】坐标系中的动点问题（非函数）

2. 两个直角边为6的全等的等腰 $\text{Rt}\triangle AOB$ 和 $\text{Rt}\triangle CED$ 中，按图(1)所示的位置放置， A 与 C 重合， O 与 E 重合。

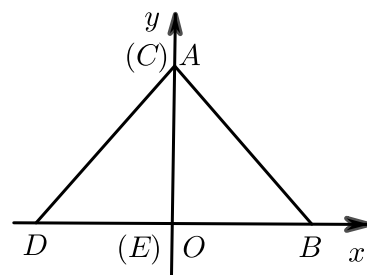


图 1

- (1) 求图(1)中 A ， B ， D 三个点的坐标。
- (2) $\text{Rt}\triangle AOB$ 固定不动， $\text{Rt}\triangle CED$ 沿 x 轴以每秒2个单位长度向右运动，当点 D 运动到与点 B 重合时停止，设运动 x 秒后 $\text{Rt}\triangle AOB$ 和 $\text{Rt}\triangle CED$ 的重叠部分面积为 y ，求 y 与 x 之间的函数关系式。
- (3) 当 $\text{Rt}\triangle CED$ 以(2)中的速度和方向运动，运动时间 $x = 4$ 秒时， $\text{Rt}\triangle CED$ 运动到如图2所示的位置，求点 G 的坐标。

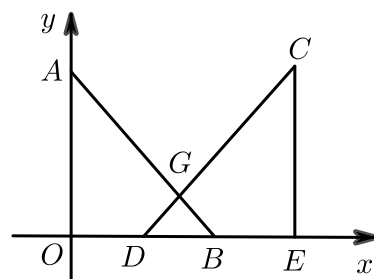


图 2

【答案】(1) $A(0, 6)$ ， $B(6, 0)$ ， $D(-6, 0)$ 。

(2) y 与 x 的函数关系式为： $y = \begin{cases} -3x^2 + 12x (0 \leq x < 3) \\ x^2 - 12x + 36 (3 \leq x \leq 6) \end{cases}$ 。

(3) 点 G 的坐标为 $G(4, 2)$ 。

【解析】(1) 因为两个直角边为6的全等的等腰 $\text{Rt}\triangle AOB$ 和 $\text{Rt}\triangle CED$ 中，

可得： $OA = OD = OB = 6$ ，

$\therefore$ 三点的坐标分别为 $A(0, 6)$ ， $B(6, 0)$ ， $D(-6, 0)$ 。

(2) 当 $0 \leq x < 3$ 时，位置如图A所示，作 $GH \perp DB$ ，垂足为 H ，

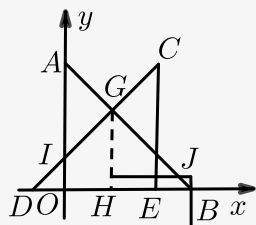


图 A

可以知道 $OE = 2x$ ， $EH = x$ ， $OD = 6 - 2x$ ， $DH = 6 - x$ ，

$\therefore y = 2S_{IOHG} = 2(S_{\triangle GHD} - S_{\triangle IOD})$ ，

$$= 2 \left[\frac{1}{2}(6-x)^2 - \frac{1}{2}(6-2x)^2 \right] ,$$

$$= 2 \left(\frac{3}{2}x^2 + 6x \right) ,$$

$$= -3x^2 + 12x ,$$

当 $3 \leq x \leq 6$ 时，位置如图B所示，

可以知道： $DB = 12 - 2x$ ，

$$y = S_{\triangle DGB} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} DB \right)^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (12 - 2x) \right]^2 = x^2 - 12x + 36 ,$$

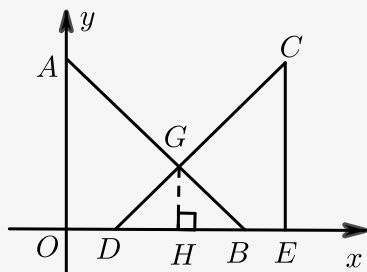


图 B

$\therefore y$ 与 x 的函数关系式为： $y = \begin{cases} -3x^2 + 12x (0 \leq x < 3) \\ x^2 - 12x + 36 (3 \leq x \leq 6) \end{cases}$ 。

(3) 图B中，作 $GH \perp OE$ ，垂足为 H ，

当 $x = 4$ 时， $OE = 2x = 8$ ，

$\therefore DB = 12 - 2x = 4$ ， $GH = DH = \frac{1}{2}BD = 2$ ，

$$OH = 6 - BH = 6 - \frac{1}{2}DB = 6 - 2 = 4$$

$\therefore$ 点 G 的坐标为 $G(4, 2)$ 。

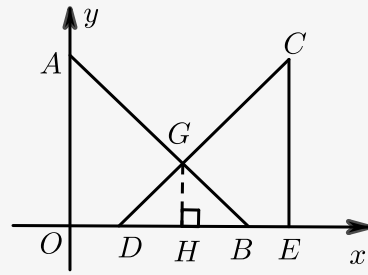


图 B

【标注】【知识点】二次函数与面积

3. 如图(1), 在平面直角坐标系中, 点 $A(0, -6)$, 点 $B(6, 0)$. $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, $\angle CDE = 90^\circ$, $CD = 4$, $DE = 4\sqrt{3}$, 直角边 CD 在 y 轴上, 且点 C 与点 A 重合. $\text{Rt}\triangle CDE$ 沿 y 轴正方向平行移动, 当点 C 运动到点 O 时停止运动. 解答下列问题:

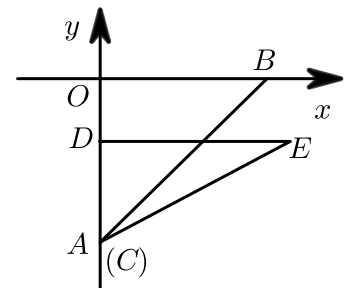


图 1

- (1) 如图(2), 当 $\text{Rt}\triangle CDE$ 运动到点 D 与点 O 重合时, 设 CE 交 AB 于点 M , 求 $\angle BME$ 的度数.

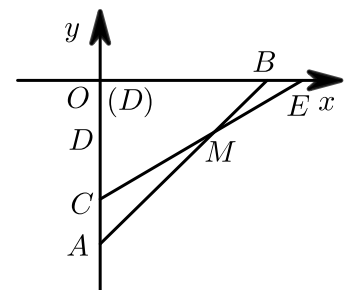


图 2

- (2) 如图(3), 在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 的运动过程中, 当 CE 经过点 B 时, 求 BC 的长.

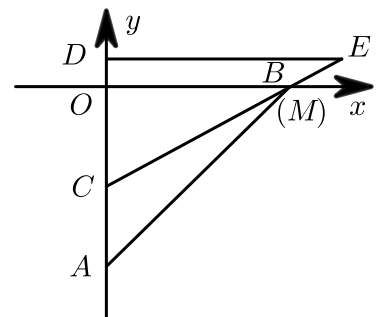


图 3

- (3) 在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 的运动过程中, 设 $AC = h$, $\triangle OAB$ 与 $\triangle CDE$ 的重叠部分的面积为 S , 请写出 S 与 h 之间的函数关系式, 并求出面积 S 的最大值.

【答案】(1) 15° .

(2) $BC = 4\sqrt{3}$.

(3) ① $h < 2$ 时, $S = -\frac{\sqrt{3}+1}{4}h^2 + 4h + 8$, $S_{\text{最大}} = 15 - \sqrt{3}$,
 ② $2 \leq h < 6 - 2\sqrt{3}$ 时, $S = 18 - \frac{3+\sqrt{3}}{4}h^2$, $S_{\text{最大}} = 15 - \sqrt{3}$,
 ③ $6 - 2\sqrt{3} < h \leq 6$ 时, $S = \frac{\sqrt{3}}{2}(6-h)^2$, $S_{\text{最大}} = 14\sqrt{3} - 36$.

【解析】(1) 如图2,

$\because$ 在平面直角坐标系中, 点 $A(0, -6)$, 点 $B(6, 0)$.

$\therefore OA = OB$,

$\therefore \angle OAB = 45^\circ$,

$\because \angle CDE = 90^\circ$, $CD = 4$, $DE = 4\sqrt{3}$,

$\therefore \angle OCE = 60^\circ$,

$\therefore \angle CMA = \angle OCE - \angle OAB = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$

,

$\therefore \angle BME = \angle CMA = 15^\circ$.

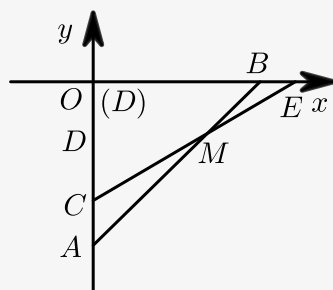


图 2

(2) 如图3,

$\because \angle CDE = 90^\circ$, $CD = 4$, $DE = 4\sqrt{3}$,

$\therefore \angle OBC = \angle DEC = 30^\circ$,

$\because OB = 6$,

$\therefore BC = 4\sqrt{3}$.

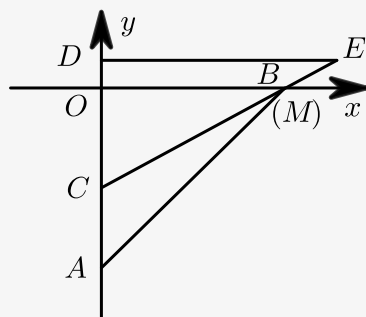


图 3

(3) ① $h < 2$, 如图4, 作 $MN \perp y$ 轴交 y 轴于点 N , 作 $MF \perp DE$ 交 DE 于点 F ,

$\because CD = 4$, $DE = 4\sqrt{3}$, $AC = h$, $AN = NM$

,

$\therefore CN = 4 - FM$, $AN = MN = 4 + h - FM$,

$\because \triangle CMN \sim \triangle CED$,

$\therefore \frac{CN}{CD} = \frac{MN}{DE}$,

$\therefore \frac{4 - FM}{4} = \frac{4 + h - FM}{4\sqrt{3}}$,

解得 $FM = 4 - \frac{\sqrt{3}+1}{2}h$,

$\therefore S = S_{\triangle EDC} - S_{\triangle EGM}$

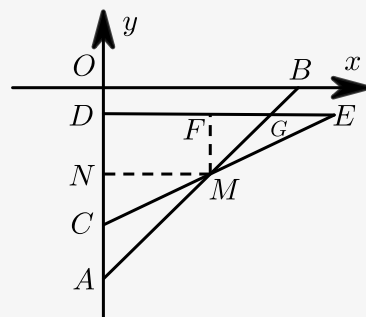


图 4

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times (4\sqrt{3} - 4 - h) \times \left(4 - \frac{\sqrt{3}+1}{2}h\right) \\
&= -\frac{\sqrt{3}+1}{4}h^2 + 4h + 8, \\
S_{\text{最大}} &= 15 - \sqrt{3}, \\
\text{②当 } 2 \leq h < 6 - 2\sqrt{3} \text{ 时,} \\
S &= S_{\triangle AOB} - S_{\triangle ACM} \\
&= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \frac{1}{2} \times h \times \left(h + \frac{\sqrt{3}+1}{2}h\right) \\
&= 18 - \frac{3+\sqrt{3}}{4}h^2, \\
S_{\text{最大}} &= 15 - \sqrt{3}, \\
\text{③如图3, 当 } 6 - 2\sqrt{3} < h \leq 6 \text{ 时,} \\
S &= S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \times OC \times \sqrt{3}OC = \frac{\sqrt{3}}{2}(6-h)^2, \\
S_{\text{最大}} &= 14\sqrt{3} - 36.
\end{aligned}$$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】函数的图象

【知识点】二次函数一般式

【知识点】二次函数与直角三角形结合

【知识点】坐标系中的平移-图形的平移

【知识点】角的和差的计算与证明-不需要分类讨论

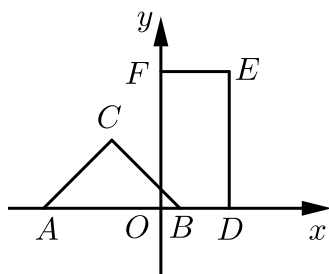
【知识点】相似三角形的性质与判定综合

【知识点】相似三角形的性质

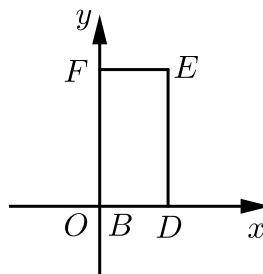
【知识点】相似三角形与实际应用

【思想】数形结合思想

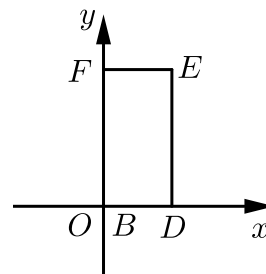
4. 如图①等腰直角 $\triangle ABC$ 的斜边 AB 长为4, 矩形 $ODEF$ 的边 OD 长为2, DE 长为4, 将等腰直角 $\triangle ABC$ 沿 x 轴向右平移得等腰直角 $\triangle A'B'C'$.



图①



备用图①



备用图②

- (1) 当线段 $A'C'$ 所在直线经过点 E 时, 求此时点 C' 的坐标.

- (2) 连接 $C'F$, $C'E$. 当线段 $C'F$ 和线段 $C'E$ 之和最短时, 求矩形 $ODEF$ 和等腰直角 $\triangle A'B'C'$ 重叠部分的面积.
- (3) 当矩形 $ODEF$ 和等腰直角 $\triangle A'B'C'$ 重叠部分的面积为 $\frac{5}{2}$ 时, 求直线 $A'C'$ 与 y 轴交点的坐标. (本问直接写出答案即可)

【答案】 (1) 点 C' 的坐标为 $(0, 2)$.

(2) $S = 3$.

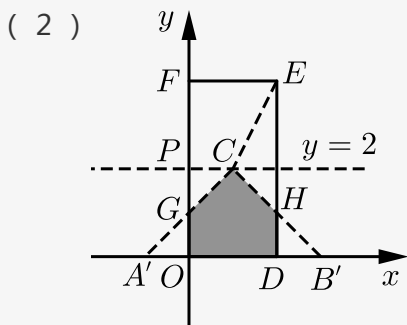
(3) 标为 $\left(0, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(0, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$.

【解析】 (1) $\because$ 等腰直角 $\triangle ABC$,

$$\therefore \angle CAB = 45^\circ,$$

当直线 $A'C'$ 经过点 $E(2, 4)$ 时,

此时点 C' 的坐标为 $(0, 2)$.



由题意, 点 C 在直线 $y = 2$ 上移动,

而点 F 和点 O 关于直线 $y = 2$ 对称,

当点 E , C' , O 在一条直线上时,

$C'F + C'E$ 最小,

即此时 $C'F + C'E$ 取得最小值,

易证 $\triangle OPC' \sim \triangle OFE$,

$$\therefore \frac{C'P}{EF} = \frac{OP}{OF} = \frac{1}{2},$$

$\therefore E(2, 4)$,

$\therefore C'(1, 2)$,

设直线 $A'C'$ 的解析式为 $y = x + b$,

把 $C'(1, 2)$ 代入, 得直线 $A'C'$ 的解析式为 $y = x + 1$,

如图, 此时 $G(0, 1)$, $D(2, 0)$, $H(2, 1)$,

$$\therefore \text{重叠部分的面积为 } S = \frac{1}{2} A'C' \cdot B'C' - \frac{1}{2} A'O \cdot OG - \frac{1}{2} DB' \cdot DH = 3.$$

(3)

直线 $A'C'$ 与 y 轴交点的坐标为 $\left(0, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$.

【标注】【知识点】一次函数与等腰直角三角形

5. 已知： $\triangle EFP$ 和矩形 $ABCD$ 如图①摆放（点 C 与点 E 重合），点 $B, C(E), F$ 在同一直线上， $AB = 3\text{cm}, BC = 9\text{cm}, EF = 8\text{cm}, PE = PF = 5\text{cm}$. 如图②， $\triangle EFP$ 从图①的位置出发，沿 CB 方向匀速运动，速度为 2cm/s ，当点 F 与点 C 重合时 $\triangle EFP$ 停止运动. 设运动时间为 $t(\text{s}) (0 < t < 4)$ ，解答下列问题：

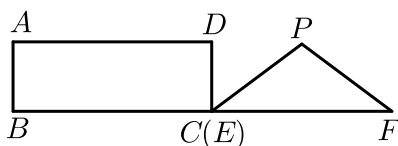


图 ①

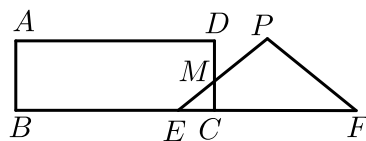


图 ②

- (1) 当 $0 < t < 2$ 时， EP 与 CD 交于点 M ，请用含 t 的代数式表示 $CE = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $CM = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) 当 $2 < t < 4$ 时，如图③， PF 与 CD 交于点 N ，设四边形 $EPNC$ 的面积为 $y(\text{cm}^2)$ ，求 y 与 t 之间的函数关系式.

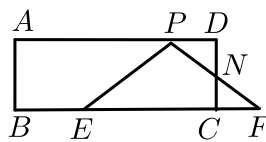
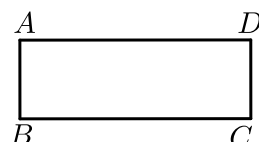


图 ③

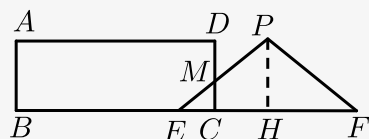


备用图

- (3) 当 $2 < t < 4$ 时，且 $S_{\text{四边形}EPNC} : S_{\text{矩形}ABCD} = 1 : 4$ 时，请求出 t 的值.
- (4) 连接 BD ，在运动过程中，当 BD 与 EP 相交时，设交点为 O ，当 $t = \underline{\hspace{2cm}}$ 时， O 在 $\angle BAD$ 的平分线上. (不需要写解答过程)

- 【答案】(1) $2t; \frac{3}{2}t$
 (2) $y = -\frac{3}{2}t^2 + 12t - 12$.
 (3) $4 - \frac{\sqrt{14}}{2}$.
 (4) $\frac{31}{8}$

【解析】(1) 如图，过点 P 作 $PH \perp EF$ ，垂足为 H ，



$\because EF = 8\text{cm}, PE = PF = 5\text{cm}, PH \perp EF$,
 $\therefore EH = HF = 4\text{cm}$,

$$\begin{aligned}
&\therefore AM = ON, \\
&\therefore AO \text{ 平分 } \angle DAB, OM \perp AD, ON \perp AB, \\
&\therefore OM = ON, \\
&\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle AOD}, \\
&\therefore \frac{3 \times 9}{2} = \frac{1}{2} \times 3 \times ON + \frac{1}{2} \times 9 \times OM, \\
&\therefore ON = OM = \frac{9}{4} = AM,
\end{aligned}$$

法一：

$$\begin{aligned}
&\therefore AD \parallel BC, \\
&\therefore \angle APE = \angle PEC, \\
&\therefore \tan \angle APE = \tan \angle PEC = \frac{3}{4} = \frac{OM}{MP}, \\
&\therefore PM = 3, \\
&\therefore PD = AD - AM - MP = \frac{15}{4},
\end{aligned}$$

由题知 $PD = 2t - 4$,

$$\therefore 2t - 4 = \frac{15}{4},$$

$$t = \frac{31}{8}.$$

法二：

易知 $\triangle BON \sim \triangle BDA$,

$$\begin{aligned}
&\therefore \frac{BO}{BD} = \frac{NO}{AD} = \frac{\frac{9}{4}}{9} = \frac{1}{4}, \\
&\therefore \frac{BO}{OD} = \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

易知 $\triangle BON \sim \triangle BDA$,

$$\therefore \frac{OB}{OD} = \frac{BE}{PD} = \frac{1}{3},$$

由题知： $BE = 9 - 2t$, $PD = 2t - 4$,

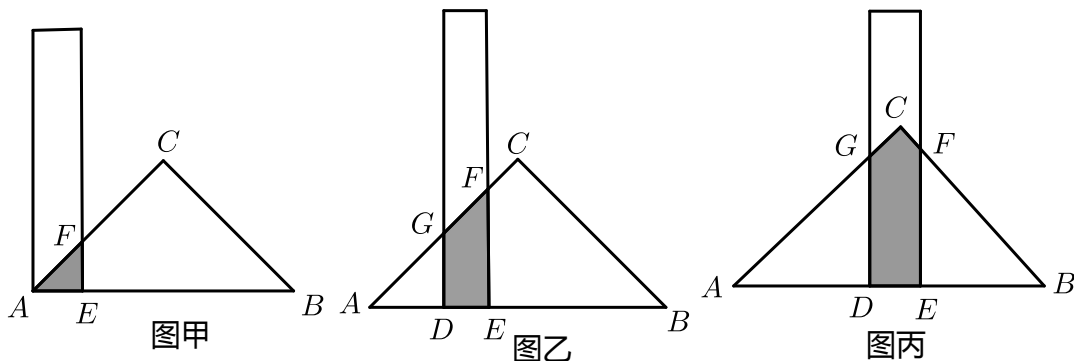
$$\therefore \frac{9 - 2t}{2t - 4} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore t = \frac{31}{8}.$$

故答案为： $\frac{31}{8}$.

【标注】【知识点】平移构造特殊图形

6. 有一根直尺短边长2cm，长边长10cm，还有一块锐角为45°的直角三角形纸板，它的斜边长为12cm，如图甲，将直尺的短边DE与直角三角形纸板的斜边AB重合，且点D与点A重合．将直尺沿射线AB方向平移，如图乙，设平移的长度为xcm，且满足0 ≤ x ≤ 10，直尺和三角形纸板重叠部分的面积（即图中阴影部分）为Scm²．



- (1) 当 $x = 0\text{cm}$ 时, $S = \underline{\hspace{2cm}}$; 当 $x = 4\text{cm}$ 时, $S = \underline{\hspace{2cm}}$; 当 $x = 10\text{cm}$ 时, $S = \underline{\hspace{2cm}}$.
 (2) 是否存在一个位置, 使阴影部分面积为 11cm^2 ? 若存在, 请求出此时的值 .

【答案】 (1) 2cm^2 ; 10cm^2 ; 2cm^2

(2) 存在, 5cm .

【解析】 (1) 当 $x = 0\text{cm}$ 时,

$$S = 2 \times 2 \div 2 = 2\text{cm}^2 ;$$

当 $x = 4\text{cm}$ 时,

$$S = 6 \times 6 \div 2 - 4 \times 4 \div 2 = 10\text{cm}^2 ;$$

当 $x = 10\text{cm}$ 时,

$$S = 2 \times 2 \div 2 = 2\text{cm}^2 .$$

(2) 当 $x = 4$ 时, $S = 10\text{cm}^2$,

所以当 $S = 11\text{cm}^2$ 时, x 必然大于 4, 即 $-x^2 + 10x - 14 = 11$,

解得 $x_1 = x_2 = 5$, 所以当 $x = 5\text{cm}$ 时, 阴影部分面积为 11cm^2 .

【标注】【知识点】一元一次方程的几何问题

7. 在平面直角坐标系中, 点 $A(4, 0)$, B 为第一象限内一点, 且 $OB \perp AB$, $OB = 2$.

(1) 如图①, 求点 B 的坐标 .

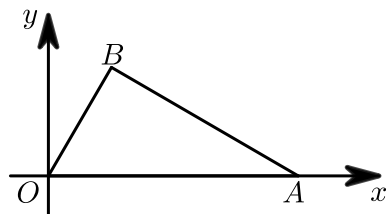


图 ①

(2) 如图②, 将 $\triangle OAB$ 沿 x 轴向右平移得到 $\triangle O'A'B'$, 设 $OO' = m$, 其中 $0 < m < 4$. 连接 BO' , AB 与 $O'B'$ 交于点 C .

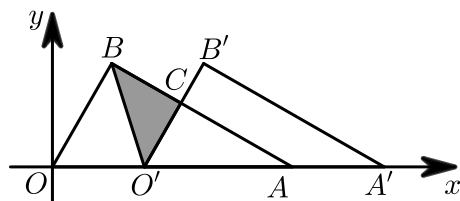


图 ②

- ① 试用含 m 的式子表示 $\triangle BCO'$ 的面积 S ，并求出 S 的最大值。
 ② 当 $\triangle BCO'$ 为等腰三角形时，求点 C 的坐标（直接写出结果即可）。

【答案】 (1) $(1, \sqrt{3})$.

(2) ① $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

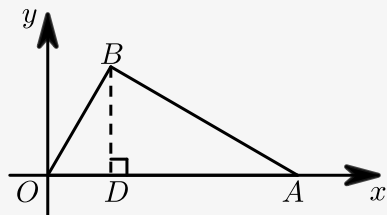
② $\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \frac{3\sqrt{3}-3}{2}\right)$.

【解析】 (1) $\because OB \perp AB$, $OA = 4$, $OB = 2$,

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ , \angle OAB = 30^\circ , AB = 2\sqrt{3} .$$

过点 B 作 $BD \perp OA$, 垂足为 D .

$$\therefore OD = 1 , BD = \sqrt{3} .$$



$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$.

(2) ① $\because \triangle O'A'B'$ 是 $\triangle OAB$ 平移得到的 ,

$$\therefore \angle A'O'B' = \angle AOB = 60^\circ , O'B' \perp AB .$$

$$\therefore OO' = m ,$$

$$\therefore AO' = 4 - m .$$

$$\therefore O'C = \frac{1}{2}AO' = \frac{1}{2}(4 - m) ,$$

$$AC = \frac{\sqrt{3}}{2}AO' = \frac{\sqrt{3}}{2}(4 - m) .$$

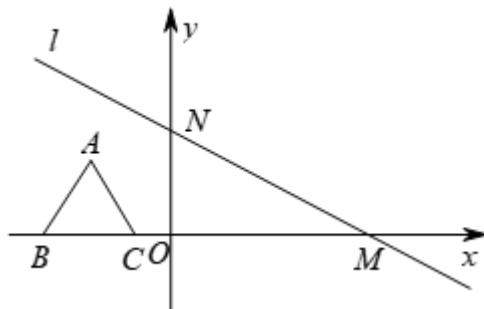
$$\therefore BC = AB - AC = \frac{\sqrt{3}}{2}m .$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}BC \cdot O'C = \frac{\sqrt{3}}{8}m(4 - m) = \frac{\sqrt{3}}{8}[-(m - 2)^2 + 4] .$$

当 $m = 2$ 时 , S 取得最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

② $\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \frac{3\sqrt{3}-3}{2}\right)$.

8. 如图，在平面直角坐标系中，有一条直线 $l: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 M 、 N ，一个高为3的等边三角形 ABC ，边 BC 在 x 轴上，将此三角形沿着 x 轴的正方向平移。



- (1) 在平移过程中，得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ，此时顶点 A_1 恰落在直线 l 上，写出 A_1 点的坐标 _____。
- (2) 继续向右平移，得到 $\triangle A_2B_2C_2$ ，此时它的外心 P 恰好落在直线 l 上，求 P 点的坐标。
- (3) 在直线 l 上是否存在这样的点，与(2)中的 A_2 、 B_2 、 C_2 任意两点能同时构成三个等腰三角形？如果存在，求出点的坐标；如果不存在，说明理由。

【答案】(1) $(\sqrt{3}, 3)$

(2) $P(3\sqrt{3}, 1)$ 。

(3) 存在四个点，分别是 $P(3\sqrt{3}, 1)$ ， $Q(\sqrt{3}, 3)$ ， $S(4\sqrt{3} - 3, \sqrt{3})$ ， $R(4\sqrt{3} + 3, -\sqrt{3})$ 。

【解析】(1) $\because$ 等边三角形 ABC 的高为3，

$\therefore A_1$ 点的纵坐标为3，

$\because$ 顶点 A_1 恰落在直线 l 上，

$$\therefore 3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4,$$

解得； $x = \sqrt{3}$ ，

$\therefore A_1$ 点的坐标是 $(\sqrt{3}, 3)$ ，

故答案为： $(\sqrt{3}, 3)$ 。

(2) 设 $P(x, y)$ ，连接 A_2P 并延长交 x 轴于点 H ，连接 B_2P ，

在等边三角 $\triangle A_2B_2C_2$ 中，高 $A_2H = 3$ ，

$$\therefore A_2B_2 = 2\sqrt{3}, HB_2 = \sqrt{3},$$

$\because$ 点 P 是等边三角形 $A_2B_2C_2$ 的外心，

$$\therefore \angle PB_2H = 30^\circ,$$

$$\therefore PH = 1, \text{ 即 } y = 1,$$

将 $y = 1$ 代入 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$,

解得: $x = 3\sqrt{3}$.

$\therefore P(3\sqrt{3}, 1)$.

(3) $\because$ 点 P 是等边三角形 $A_2B_2C_2$ 的外心,

$\therefore \triangle PA_2B_2, \triangle PB_2C_2, \triangle PA_2C_2$ 是等腰三角形

$\therefore$ 点 P 满足的条件, 由 (2) 得 $P(3\sqrt{3}, 1)$,

由 (2) 得, $C_2(4\sqrt{3}, 0)$, 点 C_2 满足直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$ 的关系式,

$\therefore$ 点 C_2 与点 M 重合

$\therefore \angle PMB_2 = 30^\circ$,

设点 Q 满足的条件, $\triangle QA_2B_2, \triangle B_2QC_2, \triangle A_2QC_2$ 能构成等腰三角形,

此时 $QA_2 = QB_2, B_2Q = B_2C_2, A_2Q = A_2C_2$,

作 $QD \perp x$ 轴于点 D , 连接 QB_2 ,

$\therefore QB_2 = 2\sqrt{3}, \angle QB_2D = 2\angle PMB_2 = 60^\circ$,

$\therefore QD = 3$,

$\therefore Q(\sqrt{3}, 3)$,

设点 S 满足的条件, $\triangle SA_2B_2$,

$\triangle C_2B_2S, \triangle C_2SA_2$ 是等腰三角形,

此时 $SA_2 = SB_2, C_2B_2 = C_2S$,

$C_2A_2 = C_2S$,

作 $SF \perp x$ 轴于点 F ,

$\therefore SC_2 = 2\sqrt{3}, \angle SB_2C_2 = \angle PMB_2 = 30^\circ$,

$\therefore SF = \sqrt{3}$,

$\therefore S(4\sqrt{3} - 3, \sqrt{3})$,

设点 R 满足的条件, $\triangle RA_2B_2, \triangle C_2B_2R, \triangle C_2A_2R$ 能构成等腰三角形,

此时 $RA_2 = RB_2, C_2B_2 = C_2R, C_2A_2 = C_2R$,

作 $RE \perp x$ 轴于点 E ,

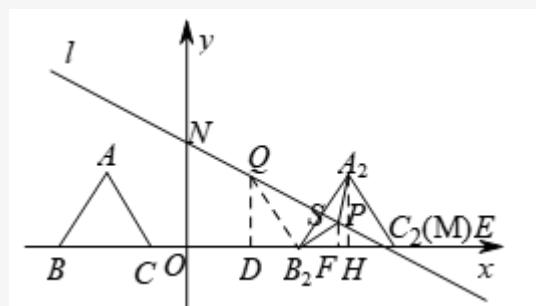
$\therefore RC_2 = 2\sqrt{3}, \angle RC_2E = \angle PMB_2 = 30^\circ$,

$\therefore ER = \sqrt{3}$,

$\therefore R(4\sqrt{3} + 3, -\sqrt{3})$.

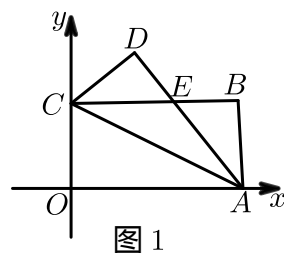
答: 存在四个点, 分别是 $P(3\sqrt{3}, 1), Q(\sqrt{3}, 3), S(4\sqrt{3} - 3, \sqrt{3})$,

$R(4\sqrt{3} + 3, -\sqrt{3})$.

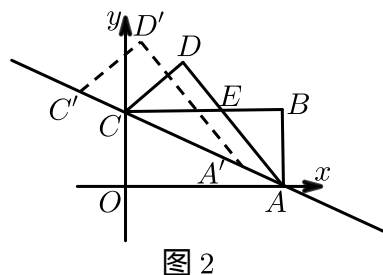


【标注】【知识点】一次函数与等腰三角形结合

9. 如图1, 矩形 $OABC$ 的边 OA 、 OC 分别在 x 轴、 y 轴上, B 点坐标是 $(8, 4)$, 将 $\triangle AOC$ 沿对角线 AC 翻折得 $\triangle ADC$, AD 与 BC 相交于点 E .



- (1) 求证: $\triangle CDE \cong \triangle ABE$.
- (2) 求 E 点坐标.
- (3) 如图2, 若将 $\triangle ADC$ 沿直线 AC 平移得 $\triangle A'D'C'$ (边 $A'C'$ 始终在直线 AC 上), 是否存在四边形 $DD'C'C$ 为菱形的情况? 若存在, 请直接写出点 C' 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $E(5, 4)$.

(3) 存在, C' 坐标为 $\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, 4 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}, 4 - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.

【解析】 (1) $\because$ 四边形 $OABC$ 为矩形,

$$\therefore AB = DC, \angle B = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore CD = OC = AB, \angle D = \angle ADC = \angle B,$$

$$\text{又} \angle CED = \angle ABE,$$

$$\therefore \triangle CDE \cong \triangle ABE (\text{AAS}),$$

$$\therefore CE = AE.$$

(2) $\because B(8, 4)$, 即 $AB = 4$, $BC = 8$,

$$\text{设} CE = AE = n, \text{则} BE = 8 - n,$$

$$(8 - n)^2 + 4^2 = n^2, \text{得} n = 5,$$

$$\therefore E(5, 4).$$

(3) 设点 C 在水平方向上向左移动 m 个单位,

则在垂直方向上向上移动了 $\frac{m}{2}$ 个单位,

则 C' 坐标为 $\left(-m, 4 + \frac{1}{2}m\right)$,

则 $\because$ 四边形 $DD'C'C$ 为菱形,

$$\therefore CC'^2 = (-m)^2 + \left(\frac{1}{2}m\right)^2 = \frac{5}{4}m^2 = CD^2 = 16,$$

$$\text{解得 } m = \pm \frac{8\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{故 } C' \text{ 坐标为 } \left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, 4 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right) \text{ 或 } \left(\frac{8\sqrt{5}}{5}, 4 - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right).$$

【标注】【知识点】动点与特殊平行四边形问题

10. 如图1, 在平面直角坐标系中, 直线 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 与 x 轴、 y 轴相交于 A 、 B 两点, 动点 $C(k, 0)$ 在线段 OA 上, 将线段 CB 绕着点 C 顺时针旋转 90° 得到 CD , 此时点 D 恰好落在直线 AB 上, 过点 D 作 $DE \perp x$ 轴于点 E .

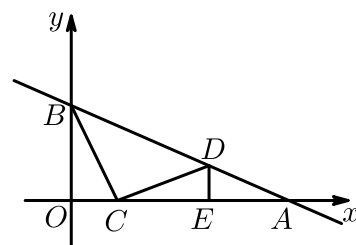


图 1

- (1) 求 k 和 b 的数量关系.
 (2) 当 $k = 1$ 时, 如图2, 将 $\triangle BCD$ 沿 x 轴正方向平移得 $\triangle B'CD'$, 当直线 $B'C'$ 经过点 D 时, 求点 B' 的坐标及 $\triangle BCD$ 平移的距离.

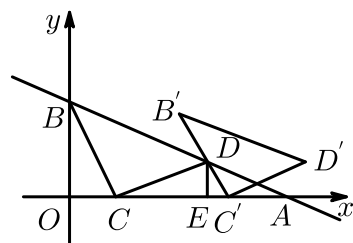
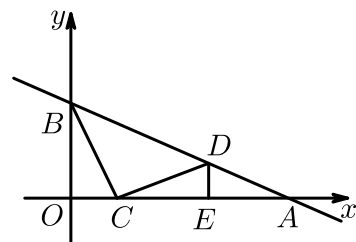


图 2

- (3) 在(2)的条件下, 若点 P 在 y 轴上, 点 Q 在直线 AB 上, 是否存在以 C 、 D 、 P 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 直接写出所有满足条件的 P 点的坐标; 若不存在, 请说明理由.



备用图

【答案】(1) $b = 3k$.

(2) $B'\left(\frac{10}{3}, 3\right), \frac{10}{3}$.

(3) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(0, \frac{11}{2}\right)$.

【解析】(1) $\because \angle BCD = 90^\circ, \angle BOC = \angle CED = 90^\circ$,

$$\therefore \angle OBC + \angle BCO = \angle DCE + \angle BCO,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle DCE,$$

$$\text{且 } BC = CD,$$

$$\therefore \triangle BOC \cong \triangle CED (\text{AAS}),$$

$$\therefore CE = BO = b, DE = CO = k,$$

$$\therefore D(k+b, k),$$

$$\text{代入 } y = -\frac{1}{2}x + b \text{ 中},$$

$$\therefore k = -\frac{1}{2}(k+b) + b,$$

$$\therefore b = 3k.$$

(2) $\because k = 1$,

$$\therefore b = 3,$$

$$\therefore D(4, 1),$$

$$\text{设 } B'C': y = -3x + b, \text{ 代入 } D \text{ 点}(4, 1),$$

$$1 = -3 \times 4 + b_1,$$

$$\therefore b_1 = 13,$$

$$\therefore B'C': y = -3x + 13,$$

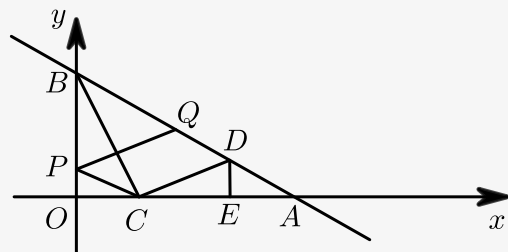
$$\text{令 } y = -3x + 13 = 3,$$

$$\therefore x = \frac{10}{3},$$

$$\therefore B'\left(\frac{10}{3}, 3\right),$$

$$\therefore \triangle BCD \text{ 平移距离为 } \frac{10}{3}.$$

(3) ①以 CD 边且 P 在 OB 上时,



$$\therefore PQ \parallel CD,$$

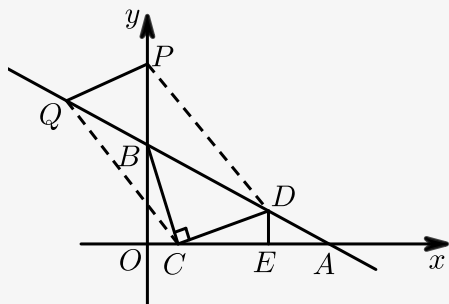
$\therefore Q$ 点到 y 轴距离 $=CE=3$,

$$\text{令 } x=3, y=-\frac{1}{2} \times 3+3=\frac{3}{2},$$

$$\therefore Q\left(3, \frac{3}{2}\right), \frac{3}{2}-1=\frac{1}{2},$$

$$\therefore P\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

②以 CD 为边, 且 P 点在 OB 外,



$\therefore PQ \parallel CD$,

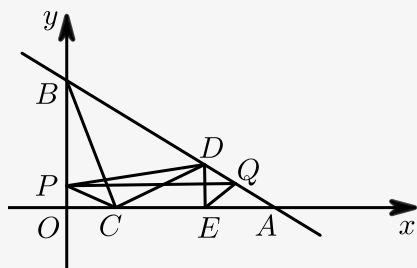
$\therefore Q$ 点横坐标为 -3 ,

$$\therefore y=-\frac{1}{2} \times (-3)+3=\frac{9}{2},$$

$$\therefore Q\left(-3, \frac{9}{2}\right), \frac{9}{2}+1=\frac{11}{2},$$

$$\therefore P\left(0, \frac{11}{2}\right).$$

③以 CD 为对角线,



CD 中点坐标为 $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

$$\therefore Q\text{点}\left(5, \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{故 } P\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

综上所述 P 点坐标为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(0, \frac{11}{2}\right)$.

【标注】【知识点】一次函数与平行四边形